NO SE PUEDE USAR CALCULADORA

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a. (valor 7 puntos) $ln(-4-x)+ln(3)=ln(2-x)$

SOLUCIÓN:

- Estudiemos los valores de x para los cuales está definida la ecuación:

Por tratarse de logaritmos se tiene que los argumentos deben ser positivos por lo tanto: $-4-x>0$ y $2-x>0$ $\Leftrightarrow$ $x<-4$ y $x<2$, lo que nos lleva a que *la ecuación tiene solución* en el intervalo $\forall x\in(-\infty,-4)$, o equivalentemente no hay solución en el intervalo $[-4,\infty)$

- Ahora si resolvamos la ecuación usando propiedades de los logaritmos:

$$ln(-4-x)+ln(3)=ln(2-x)\Leftrightarrow ln(-4-x)+ln(3)-ln(2-x)=0\Leftrightarrow ln\frac{(-4-x)(3)}{(2-x)}=0$$

$$\Leftrightarrow e^0=\frac{(-4-x)(3)}{(2-x)}\Leftrightarrow 1(2-x)=(-4-x)(3)\Leftrightarrow 2-x=-12-3x\Leftrightarrow x=-7$$

Como $-7\in(-\infty,-4)\Rightarrow x=-7$ es la solución.

$\boxed{RTA: \text{ la solución de la ecuación es } x=-7}$

b. (valor 7 puntos) $2=e^x-e^{-x}$

SOLUCIÓN:

- La función exponencial no tiene restricciones para los valores de x.
- Ahora procedemos a resolver la ecuación.

$$2=e^x-e^{-x}\Leftrightarrow 2=e^x-\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow 2e^x=e^{2x}-1\Leftrightarrow 0=e^{2x}-2e^x-1$$

Usando la fórmula cuadrática se tiene $e^x=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(-1)}}{2}$

Lo que nos lleva a $e^x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}\Leftrightarrow e^x=1\pm\sqrt{2}\Rightarrow ln\left(e^x\right)=ln\left(1\pm\sqrt{2}\right)$

Como el logaritmo es aplicable solo a valores mayores que cero y $1-\sqrt{2}<0$ se debe descartar ésta solución de la cuadrática por lo tanto debemos resolver

$$ln\left(e^x\right)=ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow x=ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$\boxed{RTA: \text{ la solución de la ecuación es } x=ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$

2. (valor 16 puntos) Elabore la gráfica de $f(x)=-2sen\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)+1\quad \forall x\in[0,2\pi]$ determinando:

Dominio, Cortes con eje x y y,, intervalos de crecimiento y decrecimiento, coordenadas de los puntos máximos y mínimos, período, amplitud y desfase. Justifique todas sus respuestas.

SOLUCIÓN:

Para obtener la gráfica de $f(x)=-2sen\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)+1\quad \forall x\in[0,2\pi]$, a partir de la gráfica de $f(x)=sen\,x$,

- Primero hacer la siguiente transformación algebraica: $f(x) = -2sen\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1 \quad \forall x \in [0, 2\pi]$
- Dibujamos un sistema de coordenadas cartesianas utilizando en el eje x una escala de $\frac{\pi}{3}$
- Se efectuarán en éste orden los movimientos:

  Corrimiento a la derecha de $\frac{\pi}{3}$ unidades, lo que equivale a desface de $\frac{\pi}{3}$ unidades

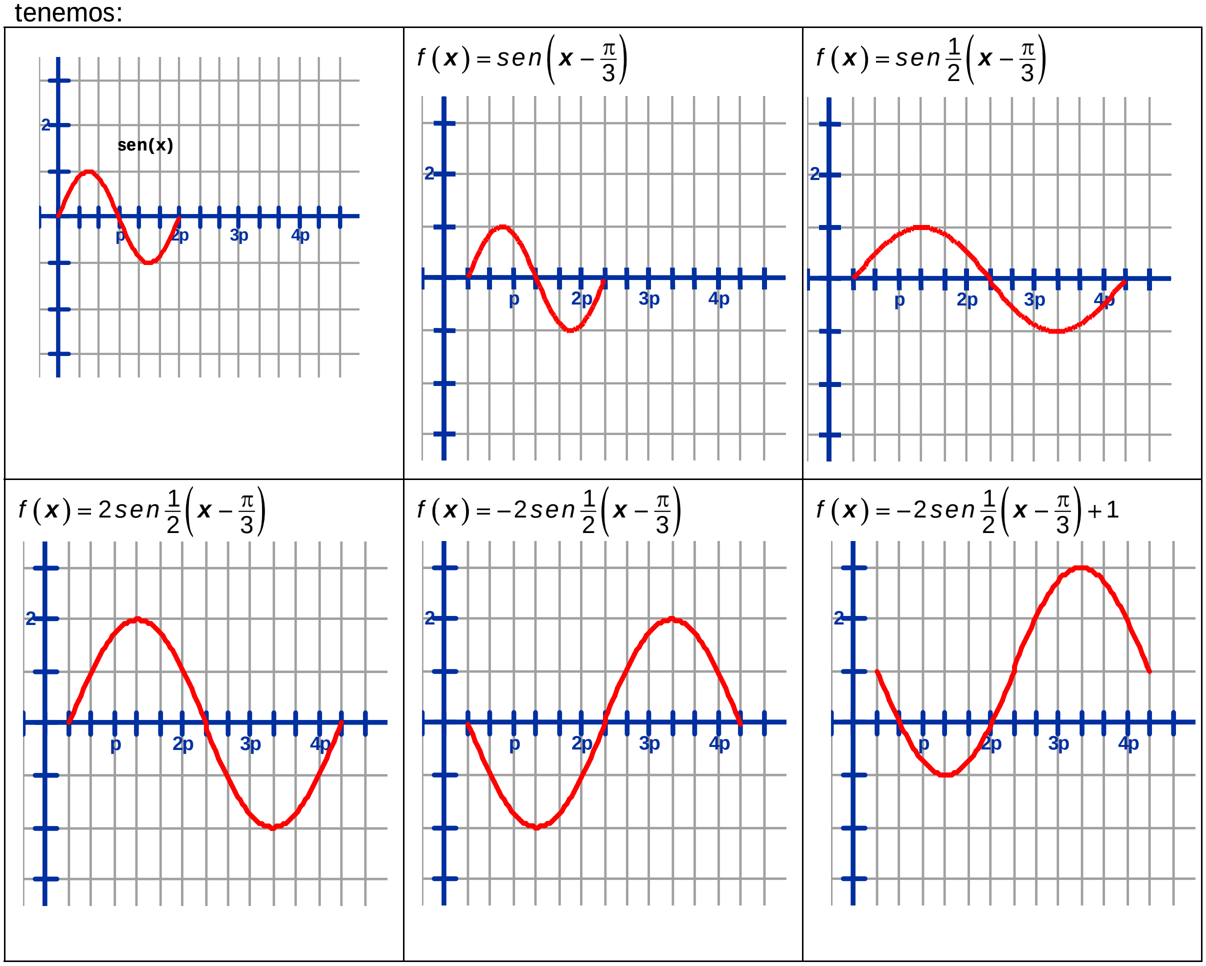
  Dilatación horizontal un factor de 2 unidades dado que $0 < \frac{1}{2} < 1$, lo que equivale a que la función tiene un período de 4π, ó hacer un ciclo en un intervalo de 4π

  Dilatación vertical de 2 unidades, lo que equivale a una amplitud de 2 unidades

  Reflexión respecto al eje de las x.

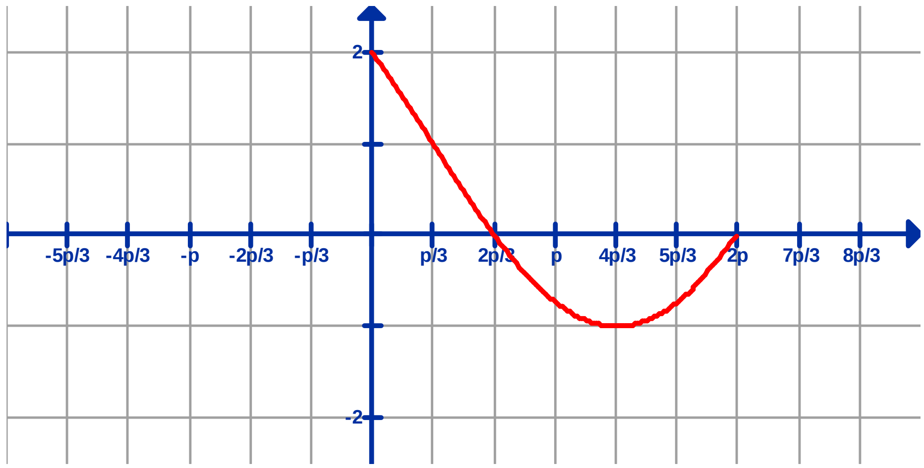
  Traslación vertical hacia arriba de 1 unidad.
- Por último limitamos la gráfica al intervalo solicitado $[0, 2\pi]$

Al elaborar la gráfica a partir del ***ciclo fundamental*** utilizando una escala de $\frac{\pi}{3}$ en el eje ***x,*** tenemos:



Como la gráfica solicitada de la función es en el intervalo $[0, 2\pi]$, debemos realizar una extensión de la gráfica al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ y limitar su gráfica hasta el punto 2π, lo cual nos da como gráfica:

NO SE PUEDE USAR CALCULADORA



A partir de la gráfica podemos contestar las preguntas así:

- La función seno está definida para todos los reales, como nos piden solo $\boxed{RTA: [0,2\pi]}$, este será el dominio.
- Cortes con el eje ***x*** $\boxed{RTA: x = \frac{2\pi}{3},\ x = 2\pi}$
- Cortes con el eje ***y*** $\boxed{RTA: y = 2}$
- Intervalos de crecimiento $\boxed{RTA: \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]}$
- Intervalos de decrecimiento $\boxed{RTA: \left[0, \frac{4\pi}{3}\right)}$
- Coordenadas de los puntos máximos $\boxed{RTA: (0,2)}$
- Coordenadas de los puntos mínimos $\boxed{RTA: \left(\frac{4\pi}{3}, -1\right)}$
- Período $\boxed{RTA: 4\pi}$
- Amplitud $\boxed{RTA: 2}$
- Desfase. $\boxed{RTA: \frac{\pi}{3} \text{ a la derecha}}$

3. (valor 10 puntos) Si $sec(\theta) = \frac{5}{3}$ y $tan(\theta) < 0$, determine el valor de las otras 5 razones trigonométricas.

SOLUCIÓN:

- $sec(\theta) = \frac{5}{3}$ y como $sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta}$,entonces, $\boxed{cos(\theta) = \frac{3}{5}}$
- si $\cos(\theta) > 0$ y $tan(\theta) < 0 \Rightarrow sen(\theta) < 0$ por lo tanto θ está en el IV cuadrante

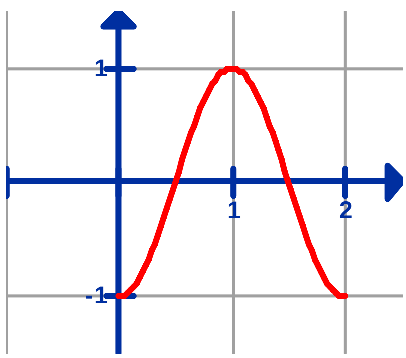
- Para encontrar el valor de $sen(\theta)$, utilizamos $cos^2(\theta)+sen^2(\theta)=1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2+sen^2(\theta)=1 \Rightarrow sen^2(\theta)=1-\frac{9}{25} \Rightarrow sen^2(\theta)=\frac{16}{25}$

  $\Rightarrow sen(\theta)=\pm\frac{4}{5}$ como $sen(\theta)<0$

  , entonces $\boxed{sen(\theta)=-\frac{4}{5}}$

- Con éstas tres funciones se pueden determinar las otras tres así:

$$\boxed{tan(\theta)=\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}=\frac{\frac{-4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3},\quad csc(\theta)=\frac{1}{sen(\theta)}=-\frac{5}{4},\quad cot(\theta)=\frac{1}{tan(\theta)}=\frac{1}{-\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}}$$



4. (valor 10 puntos) Determine la ecuación de la gráfica representada en el siguiente plano cartesiano. Justifique su respuesta.

SOLUCIÓN:

Se puede observar que corresponde a un ciclo de una función coseno de **amplitud 1**, **reflejada respecto al eje *x***, de **período 2 unidades**, por lo tanto su ecuación es:

$$\boxed{\boldsymbol{RTA}: f(\boldsymbol{x})=-cos(\pi \boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x}\in[0,2]}$$